UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 18 Bis A18
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*). Le téléphone portable de Babou contient en mémoire un répertoire de 1500 chansons dont 700 dans la catégorie mbalax, 100 dans la catégorie zouk, 200 dans la catégorie techno et 500 dans la catégorie taxourane. Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : Les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable.

40% des chansons du répertoire sont interprétées en Sérère et 28% des chansons de la catégorie mbalax sont interprétées en Sérère.

Au cours de son footing journalier, Babou écoute une chanson grâce à ce mode de lecture. On note :

M l'événement : « La chanson écoutée est de la catégorie mbalax. »

S l'événement : « La chanson écoutée est interprétée en Sérère. »

1. Calculer $p(M)$. 0.75 *pt*

2. a. Déterminer $p(S)$ et $p(S/M)$. 2×0.25 *pt*

b. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie mbalax interprétée en Sérère. 1 *pt*

c. Calculer $p(M/S)$. 0.75 *pt*

3. En fait, Babou écoute de cette même façon aléatoire une chanson de son répertoire lors de son footing le matin, à la prise du petit déjeuner, sur le chemin de l'école, au déjeuner et le soir avant d'aller au lit.

Son cousin Bachir, fin mathématicien, lui dit qu'il a $[496 \times (0.4)^3]$ % de chances d'écouter au moins trois chansons Sérère à la fin de la journée. Dire en le justifiant si Bachir a raison ou pas. 1 *pt*

Exercice 2 (5 *points*). Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \mathrm{e}^{i|z|}z$.

1. Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives par f du point A d'affixe π et du point B d'affixe 2π. 2×0.5 *pt*

2. Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que $OM = 2k\pi$. En déduire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points invariants par f. 2×0.5 *pt*

3. Soit C le point d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et Δ la demi-droite d'origine O passant par C et ne contenant pas le point O (Demi-droite ouverte $]OC)$), M un point de Δ d'affixe z et d'image M' par f.

Déterminer $|z|$ pour que M et M' soient symétriques par rapport l'axe $(O, \overrightarrow{u})$. 0.5 *pt*

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_k$ le cercle de centre O et de rayon $2k\pi$, $\mathcal{D}_k$ la couronne délimitée par les cercles $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$ et a_k l'aire de la couronne $\mathcal{D}_k$.

a. Calculer a_k. 0.5 *pt*

b. Déterminer la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 0.5 *pt*

c. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 0.5 *pt*

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer les points de $\Delta \cap \mathcal{D}_k$ qui sont symétriques avec leur image par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$. 0.5 *pt*

b. Montrer que tout point de $\mathcal{D}_k$ a son image par f dans $\mathcal{D}_k$. 0.5 *pt*

PROBLEME (11 points).

Partie A (3 points)

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0.$ 0.5 *pt*

Soit φ une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, et soit g l'application numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \varphi(x)e^x$.

2. a. Vérifier que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$ et démontrer que, pour que φ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) + \varphi(x) = -\frac{1}{x} - \ln x, \quad (1)$$

il faut et il suffit que g soit une primitive de l'application $x \mapsto -e^x \ln x - \dfrac{e^x}{x}$. $0.5 + 1$ *pt*

b. Quel est l'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto -e^x \ln x - \dfrac{e^x}{x}$? 0.5 *pt*

3. En déduire que l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) est l'ensemble des applications $x \mapsto ae^{-x} - \ln x$ où a désigne une constante réelle. 0.5 *pt*

Partie B (5.25 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

1. a. Etudier les variations de f et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé. $0.75 + 0.25$ *pt*

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c et que $c \in]1, 2[$. $0.5 + 0.25$ *pt*

b. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} xf(x)$. 0.25 *pt*

c. Soit x un élément de l'intervalle $]0, 1]$.

Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\, dt$ en fonction de x. 0.5 *pt*

Montrer que lorsque x tend vers 0, $F(x)$ tend vers e. 0.25 *pt*

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel t tel que $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}$, on a : $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. 0.25 *pt*

b. Montrer alors que $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, 0.5 *pt*

En déduire que $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. 0.25 *pt*

3. a. Déduire des questions précédentes que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite et calculer cette limite. 0.5 *pt*

b. Établir les égalités : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(1-k/n)} = (e-1)\frac{1}{n(e^{1/n}-1)}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

2×0.25 *pt*

c. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \text{ et } v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

ont des limites lorsque n tend vers l'infini et calculer ces limites. 2×0.25 *pt*

Partie C (2.75 points)

1. a. Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1, 2]$. 0.5 *pt*

Soit P l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(1)}$.

b. Etudier les variations de P dans l'intervalle $[1, 2]$. Montrer que P réalise une bijection de $[1, c]$ sur un intervalle J contenu dans $[1, c]$. $0.5 + 0.25$ *pt*

En déduire que l'on définit bien une suite c_n d'éléments de $[1, c]$ en posant $c_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\quad c_{n+1} = P(c_n)$. 0.25 *pt*

2. a. Montrer que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leq P'(x) \leq P'(2) \leq \frac{7}{12}$. 0.25 *pt*

b. En utilisant le théorème des accroissements finis, vérifier que pour tout entier n,

$$|c_{n+1} - c| \leq \frac{7}{12}|c_n - c|.$$ 0.5 *pt*

En déduire que la suite (c_n) est convergente et déterminer sa limite. 0.25 *pt*

c. Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que c_n soit une valeur approchée de c à 10^{-2} près ? 0.25 *pt*